J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
6 (1972) 473-478

FEUILLETAGE À SINGULARITÉS DE VARIÉTÉS DE DIMENSION 3 (THÉORÈME DE J. WOOD)

NGÔ VAN QUÊ

Introduction

Ce travail fait suite à un autre papier [1]. Soit M une ($\mathscr{C}^\infty$) variété de dim 3. Quoique notre résultat, qui est une conséquence d'un théorème de J. Wood [2], se généralise pour toute variété de dim 3, nous supposerons pour simplifier que M est compacte et orientable.

1. Rappel: Théorème de J. Wood

Le fibré tangent $T(M)$ est trivial: $T(M) \simeq M \times \boldsymbol{R}^3$. Tout champ de vecteurs X est donc par cet isomorphisme une application ($\mathscr{C}^\infty$): $M \to \boldsymbol{R}^3$. Etant donné X partout non-nul, rappelons que d'après J. Wood, il existe un champ Y dans la classe d'homotopie $\bar{X}$ do X:

$$\bar{Y} = \bar{X} \in [M, \boldsymbol{R}^3 - \{0\}]$$

tel que Y soit transverse à un feuilletage de M. D'une autre façon de dire [1, § 3], il existe une 1-forme ω intégrable sur M, telle que $\omega(\mathrm{Y}) \lneqq 0$ sur M.

De plus, nous faisons la remarque essentielle suivante: Soit Ω ouvert de M: $\Omega = \bigcup_{1<i<r} \mathscr{U}_i$, réunion d'ouverts de coordonnées $\mathscr{U}_i$ difféomorphes au disque D^3 et à fermeture $\mathscr{U}_i$ disjointe:

$$D^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, |x_1| + |x_2| + |x_3| < 1\} \;.$$

Supposons que sur chaque $\mathscr{U}_i$, X est transverse au feuilletage de $\mathscr{U}_i$ défini par la 1-forme dx_3. Alors, on pourra prendre Y tel que $Y|_\Omega = X|_\Omega$ et le feuilletage de M, qui est transverse à Y, induise sur chaque $\mathscr{U}_i$ le feuilletage considéré, défini par dx_3.

2. Champ de vecteurs générique

Soit X un champ de vecteurs générique sur M. De façon précise, si A est un zéro de X, alors dans un voisinage de coordonnées $\mathscr{U}$ de A dans M:

Received September 28, 1971.

$$\mathscr{U} \underset{A \to 0}{\rightrightarrows} \boldsymbol{R}^3 \ni x = (x_1, x_2, x_3)$$

$X|_{\mathscr{U}}$ est de la forme

$$X = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \alpha_j^i x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + g(x) \tag{2.1}$$

avec a) $g(x) = 0(\|x\|^2)$, b) la matrice (α_j^i) a toutes ses valeurs propres $A_i = a_i + \sqrt{-1}\, b_i$ de partie réelle $a_i \neq 0$.

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 1. *Soit donné un champ de vecteurs X sur $\boldsymbol{R}^3$ de la forme* (2.1). *Alors le système linéaire de coordonnées (x_1, x_2, x_3) étant convenablement choisi (la matrice (α_j^i) sera en particulier de la forme canonique de Jordan), sur tout voisinage assez petit Ω de* 0 *dans $\boldsymbol{R}^3$, la* 1*-forme intégrable ω*

$$\omega = d(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2)$$

est transverse à X.

Rappelons que ω est transverse à X si $\omega(X) \gneqq 0$ sur $\Omega - \{0\}$.

Autrement dit, au voisinage de tout zéro A de X, X est transverse à un feuilletage singulier à singularité générique A. Nous disons encore que A est un zéro *sphérique* ou *conique* de X respectivement suivant que A est un point de singularité sphérique ou conique du feuilletage singulier transverse défini au voisinage de A.

Rappelons aussi que l'indice du zéro A de X est défini comme ± 1, dont le signe est celui du det $(\alpha_j^i) = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$.

3. Théorème principal

Le champ générique de vecteurs X étant donné, désignons par $A_1, \cdots, A_{2r}$ les zéros de X. Nous considérerons sur M des champs de vecteurs Y vérifiant:

1) il existe des voisinages $\mathscr{U}_i$ des A_i dans M: $\Omega = \bigcup_{1 \leq i \leq 2r} \mathscr{U}_i$,

$$Y|_{\Omega} = X|_{\Omega} ,$$

2) Y et X étant alors des champs de vecteurs partout non-nuls sur $M' = M - \Omega$, $Y|_{M'}$ et $X|_{M'}$ sont de même classe d'homotopie, modulo le bord, dans $[(M', \partial M'), \boldsymbol{R}^3 - \{0\}]$.

Dans la suite, nous disons simplement qu'un tel champ de vecteurs Y est "homotope" à X.

Théorème. *Le nombre s de zéros sphériques de X étant inférieur ou égal au nombre c des zéros coniques de X, il existe un champ de vecteurs Y, homotope à X, qui est transverse à un feuilletage à singularités génériques dans M.*

Remarque. 1) De façon précise, le feuilletage transverse est défini par une 1-forme intégrable ω telle que

$$\omega(Y) \gneqq 0 \quad \text{sur} \quad M - \{A_1, \cdots, A_{2r}\} .$$

2) L'hypothèse que $s \leq c$ s'introduit naturellement en vue de [1]. A l'aide du théorème de stabilité globale de Reeb, on pourrait montrer que le théorème considéré est faux dans le cas où $s = c + 2$.

4. Démonstration du théorème

i) Soit X un champ de vecteurs partout non-nuls dans l'espace Euclidien $\boldsymbol{R}^3$. Considérons $\gamma\colon [0, 1] \to \boldsymbol{R}^3$ une courbe joignant deux points quelconques A et B de $\boldsymbol{R}^3$ tels que

1) $\dfrac{d\gamma}{dt}(0) = X(A)$ et $\dfrac{d\gamma}{dt}(1) = X(B)$,

2) le produit scalaire Euclidien $\left\langle \dfrac{d\gamma}{dt}, X[\gamma(t)] \right\rangle \gneqq -\left\| \dfrac{d\gamma}{dt} \right\| \cdot \|X[\gamma(t)]\|$.

A et B étant donnés, l'existence de telles courbes γ est facile à établir.

Désignons par Ω un tronc fermé de cylindre d'âme γ:

$$\Omega = \{M \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, d(M, \gamma) = d(M, \gamma(t)) \leq \rho\} ,$$

i.e., ensemble de points M dont la distance à γ est réalisée par un point $\gamma(t)$ de γ et est plus petite qu'un nombre ρ assez petit donné.

Lemme 2. *Il existe un champ de vecteurs Y dans $\boldsymbol{R}^3$ tel que*

1) $Y|_{\boldsymbol{R}^3-\Omega} = X|_{\boldsymbol{R}^3-\Omega}$,

2) *sur Ω, Y et X sont de même classe d'homotopie, modulo le bord, dans* $[(\Omega, \partial\Omega), \boldsymbol{R}^3 - \{0\}]$,

3) *γ est une trajectoire de Y.*

Preuve. On peut supposer que γ est le segment

$$\gamma\colon [0, 1] \to \boldsymbol{R}^3 , \qquad \gamma(t) = (t, 0, 0) \in \boldsymbol{R}^3$$

porté par le vecteur unitaire $\vec{u}$: $\vec{u} = d\gamma/dt$.

Choisissons Ω de distance ρ assez petite telle que $\forall M \in \Omega$, $\langle X(M), \vec{u}\rangle \gneqq -\|X(M)\|$. Pour M dans Ω, posons $\theta(M)$, $0 \leq \theta(M) < \pi$, tel que

$$\langle X(M), \vec{u}\rangle = \|X(M)\| \cos\theta(M) ,$$

et désignons par $x(M)$ le point de γ réalisant la distance:

$$d(M, \gamma) = d(M, x(M)) .$$

Soit d'autre part $\varphi(x)$, $x \in [0, 1]$, une fonction positive, plus petite que ρ, et ne s'annulant qu'en 0, 1, où elle est plate. Ceci dit, il suffit de prendre pour la famille d'homotopie de champ de vecteurs Y_t, $0 \leq t \leq 1$, telle que

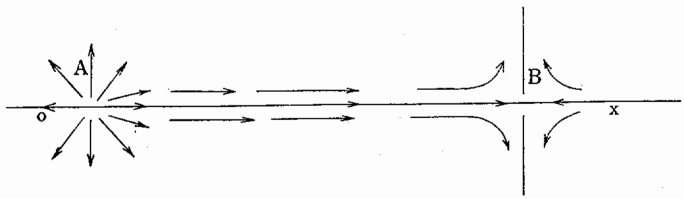
1) $Y_t(M) = X(M)$ pour M en dehors de Ω, ou dans Ω mais $d(M, x(M)) \geq \varphi(x(M))$,

2) autrement,

$$Y_t(M) = \mathrm{Rot.}\,(\vec{v}(M), \qquad t\cdot(1 - d(M, x(M))/\varphi(x(M))\theta(M))[X(M)]\ ,$$

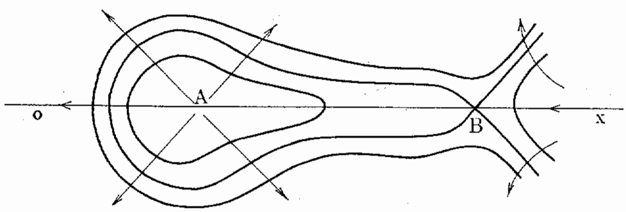
où le second membre est le transformé de $X(M)$ dans la rotation d'angle $t(1 - d(M, x(M))/\varphi[x(M)])\theta(M)$, d'axe $\vec{v}(M)$, le vecteur unitaire, orthogonal au plan $(X(M), \vec{u})$ et tel que $(\vec{v}(M), X(M), \vec{u})$ forme une base d'orientation positive choisie de $\boldsymbol{R}^3$.

ii) Par hypothèse $s \leq c$, nous pouvons associer de façon univoque à tout zéro sphérique A de X un zéro conique B d'indice opposé. Or soient A, un zéro sphérique d'indice par exemple $+1$, et B le zéro conjque correspondant d'indice -1. Par le lemme 2, modulo la classe d'homotopie considérée dans C, nous pouvons supposer que X admette une trajectoire issue de A et convergeant vers B. Ce qui nous donne dans un ouvert de coordonnées contenant A, B et cette trajectoire, une situation semblable à celle du champ de vecteurs suivants dans $\boldsymbol{R}^3$:



(avec rotation autour de l'axe ox)

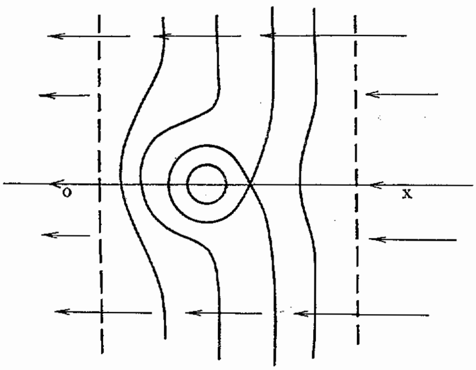
Le champ vecteurs X est donc évidemment par le lemme 1 transverse dans un voisinage $\mathscr{U}$, contenant A et B, au feuilletage à singularité sphérique A et conique B tel que celui dans $\boldsymbol{R}^3$ défini par rotation autour de l'axe ox de la figure suivante:



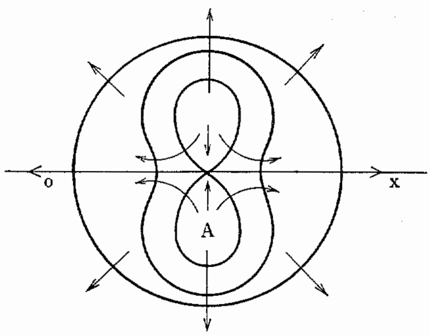
Autrement dit $\mathscr{U}$ étant difféomorphe à

$$D^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, |x_1| + |x_2| + |x_3| < 1\}\ .$$

X se comporte comme un champ de vecteurs qui est transverse dans $\mathscr{U}$ au feuilletage défini par dx_3, auquel on a fait une perturbation [1]:



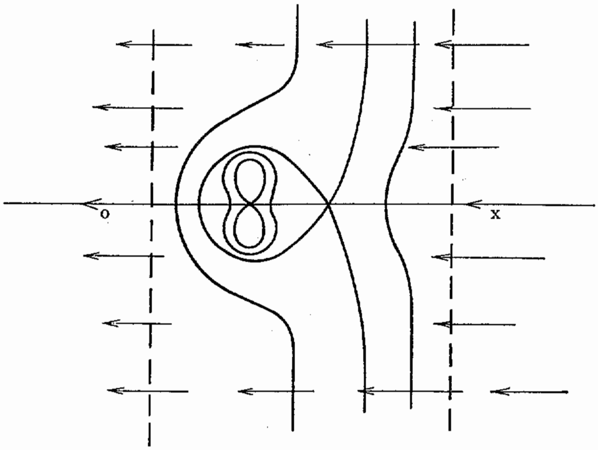
iii) Si $s \leq c - 2$, nous groupons encore deux à deux les zéros coniques non considérés de X en couple (A, B) d'indice opposé. Soit donc A un zéro conique d'indice 1. Modulo la classe d'homotopie considérée dans C, il est facile de voir comme conséquence du lemme 1 qu'on peut supposer X être transverse au voisinage de A à un feuilletage à singularité du disque fermé D^3 (dont le bord est une feuille régulière):



rotation autour de ox, avec une composante de Reeb dans le tore ouvert dont la frontière est la surface engendrée par la courbe en huit. De nouveau, par le lemme 2, on peut supposer que le point conique B associé d'indice -1 est le point de convergence d'une trajectoire, issue de A, de X. Et nous sommes comme dans ii): X se comporte dans un voisinage de coordonnées $\mathscr{U}$ contenant A, B et cette trajectoire comme être transverse au feuilletage défini par dx_3, dans

$$\mathscr{U} \simeq \{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \,|\, |x_1| + |x_2| + |x_3| < 1\}$$

auquel on a fait une perturbation avec deux points coniques:



Le théorème annoncé, d'après ce qui précède, n'est plus qu'une conséquence immédiate du théorème de J. Wood et de la remarque que nous avons faite dans § 1.

References

[1] N. van Quê & E. Wagneur, *Foliations with singularities of* 3-*manifolds,* à paraître.
[2] J. W. Wood, *Foliations on* 3-*manifolds,* Ann. of Math. **89** (1969) 336–358.

Université de Montréal